Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2010/11
22.03.2011

Nachklausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jede Richtungsableitung existiert, so ist f in x_0 stetig.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   b) Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelten die Implikationen:
   f ist stetig partiell differenzierbar. $\Rightarrow$ f ist total differenzierbar. $\Rightarrow$ Es existieren alle Richtungsableitungen von f.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   c) Durch $d(x, y) = (1 + x^2)|x - y|$ wird eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   d) Das Anfangswertproblem $y' = |y|^{\frac{3}{2}}, y(0) = 0$, besitzt eine eindeutig bestimmte globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   e) Die Grenzwertfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge ist gleichmäßig stetig.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

2. Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz genau. (5 P.)

3. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = 2\,x^2 - y(y + 1)^2$.

   a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . (4 P.)

Bitte wenden!

b) Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen lokale Extrema vorliegen, und entscheiden Sie ggf., ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt. (4 P.)

c) Besitzt f globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P.)

4. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ auf der Hyperbel

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\right\}.$$

(10 P.)

5. a) Es sei $g \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r}\,g'(r) = 0$$

und $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = g(|x|)$.

Zeigen Sie, dass u harmonisch ist (d.h., dass $\Delta u = 0$ gilt).

(6 P.)

b) Bestimmen Sie Art und Ordnung der Differenzialgleichung in Teil (a). (3 P.)

Was können Sie über die Struktur des Lösungsraums aussagen? (2 P.)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
(Hinweis: Betrachten Sie zuächst die Funktion $h = g'$). (6 P.)

6. Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem für $y' = Py$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2} & x \\ 0 & \frac{2x}{1+x^2} \end{pmatrix}.$$

(7 P.)

7. Berechnen Sie durch Variation der Konstanten eine Lösung y von

$$y' = Py + Q, \qquad y(0) = (0,0)^\top,$$

mit $Q(x) = (1+x^2)(x^2,1)^\top$ und P wie in Aufgabe 6. (8 P.)

Die Klausur gilt mit 30 (bzw. mit 24) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!